

Rezensionen / recensions / recensioni

Drollinger-Vetter, Barbara (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann. 358 S.

Welche Merkmale weist Mathematikunterricht auf, wenn er verstehensorientiert angelegt ist? Je nach Optik wird die Antwort verschieden akzentuiert ausfallen: Unter einer fachdidaktischen Brille werden die fachspezifischen Eigenheiten des zur Rede stehenden Unterrichtsinhaltes und seine methodisch aufbereitete Vermittlung stärker wahrnehmbar sein als in einer bildungswissenschaftlichen oder allgemeindidaktischen Perspektive, wo in der Regel stärker auf solche Unterrichtskomponenten geachtet wird, die vom konkreten Inhalt abstrahieren und fächerübergreifend formulierbar sind. Daraus entsteht ein Spannungsbogen, unter dem beide Sichtweisen auf Verstehen im Unterricht zuweilen um Deutungshoheit ringen. Im idealen Falle jedoch ergänzen sie sich: Lern- und kognitionspsychologische Betrachtungsweisen schärfen im Verbund mit fachdidaktischen Analysen unser Denken über Verstehensprozesse im Unterricht. Ein solch methodisch fruchtbares Zusammenspiel stellt die Arbeit von Barbara Drollinger-Vetter dar.

Es handelt sich um eine Dissertation, die am Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie und Didaktik der Universität Zürich entstanden ist, verfasst von einer Autorin, die Mathematik und Erziehungswissenschaften studiert und mehrere Jahre unterrichtet hat. Die empirische Grundlage dieser Arbeit sind Videodaten, die als Teil eines binationalen Forschungsprojekts zu «Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis» (Klieme, Pauli & Reusser 2009) hervorgegangen sind. Inhaltlich weist der videografierte Unterricht insofern eine *vergleichsweise hohe Standardisierung* auf, als es um die *Einführung des Satzes von Pythagoras* während dreier Lektionen geht. Deshalb und auch wegen der grossen Anzahl von videografierten Klassen (n = 38) ist die Ausgangslage für tiefergehendere fachdidaktische Analysen ungleich besser als beispielsweise in den TIMSS-Videostudien, in denen der Unterrichtsinhalt mit jeder Aufnahme ein anderer war und Leistungsdaten zu den beobachteten Schülerinnen und Schülern fehlten. Dies hatte u. a. zur Folge, dass die Hypothesen über die Zusammenhänge zwischen fachdidaktischen Qualitätsmerkmalen und Schülerleistungen nicht überprüfbar waren.

Die zentrale Fragestellung des Buches ist daher, durch *welche fachdidaktischen Qualitätsmerkmale sich ein Mathematikunterricht auszeichnet, in dem der Erwerb und das Verständnis eines konkreten Konzepts (hier der Satz des Pythagoras) wirksam angeleitet und unterstützt werden kann*. Bearbeitet wird diese Fragestellung über einen theoretischen wie auch empirischen Zugang (2.–4. Kap. bzw. 5.–7. Kap.).

Nach einer Einleitung (1. Kapitel) wird im 2. Kapitel das «Mathematikverstehen» aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet, und zwar aus fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer und kognitionspsychologischer Sicht. Im Zentrum steht für die Autorin dabei Aebli's Theorie des Strukturaufbaus, in dessen Rahmung das Verknüpfen und Verdichten von Elementen des Vorwissens die fundamentalen Bestandteile von Verstehensprozessen bilden. Aus dieser Perspektive vermag die Autorin auch fachdidaktisch interessante Aufschlüsse hervorzuheben. Gerne wird nämlich im Zuge der sogenannten Neuen Aufgabenkultur, der kompetenzorientierten Aufgabenentwicklung und -diagnostik auf das unterrichtliche Lernpotential «guter Aufgaben» verwiesen und dazu Kriterien formuliert (Offenheit, Authentizität, Differenzierungsvermögen etc.). Jedoch erscheinen im Hinblick auf den Strukturaufbau beim Verstehen eines konkreten Konzepts die *tatsächlich vorkommenden Verknüpfungen* während der Aufgabebearbeitung entscheidender als das *Verknüpfungspotenzial* der Aufgabenstellung, woraus folgt, dass sich fachdidaktische Unterrichtsforschung nebst der Analyse und Klassifizierung von Aufgaben vor allem auch mit *deren Anordnung und Passung im Lernprozess* beschäftigen sollte.

Im 3. Kapitel und als Vorbereitung auf das nachfolgende unternimmt die Autorin eine sachanalytische Betrachtung des Satzes von Pythagoras. Im Zentrum stehen zunächst die verschiedenen Repräsentationen des Satzes (sprachlich, formal, bildlich, handelnd) und deren Eigenheiten. Anschliessend werden unterschiedliche *Verknüpfungen*, verstanden als ein «In-Beziehung-Setzen», *konzeptspezifisch* untersucht.

Das 4. Kapitel nimmt im Buch eine zentrale Stellung ein, weil hierin das «Pythagoras-Verstehensmodell» erarbeitet wird. Es handelt sich dabei um ein *kompositorisches Modell mit drei Ebenen*: Auf der untersten Ebene des Strukturaufbaus stehen die *Verstehenselemente* des Konzepts «Satz des Pythagoras». Es sind dies «die Teilelemente des Konzepts, welche man verstanden haben muss, um das Konzept als Ganzes verstehen zu können. Diese Teilelemente müssen im Vorwissen der Schülerinnen und Schüler vorhanden sein und sie lassen sich zum Konzept verknüpfen und verdichten.» (S. 187f.) Beispiele für Verstehenselemente zum Satz des Pythagoras sind das Wissen um das rechtwinklige Dreieck als Grundfigur oder die zentrale Unterscheidung zweier Typen von Seiten (Kathete, Hypotenuse). Auf der zweiten Ebene des Verstehensmodells verschränken sich die verschiedenen Repräsentationen des Konzepts, d. h. die Verknüpfungen zwischen sprachlichen, formalen, bildlichen und handelnden Darstellungsformen des Satzes von Pythagoras. Auf der dritten und obersten Ebene schliesslich liegt der Fokus auf der Verknüpfung des Konzepts mit anderen Konzepten (beispielsweise mit ähnlichen Sätzen wie dem Höhen- bzw. Kathetensatz oder pythagoräischen Zahlentripeln etc.). Gelingende Verstehensprozesse können dann beschrieben werden durch ein vertikales Durchlaufen quasi von unten nach oben («Verdichten» von Verstehenselementen zu Repräsentationen und diese wiederum zum Konzept) oder in umgekehrter Richtung durch flexibles

Absteigen («Auffalten» des Konzepts in verschiedene Repräsentationen und diese wiederum in Verstehenselemente). Der Nutzen dieses Modells ist, dass sich mit seiner Hilfe fachdidaktische Unterrichtsqualitäten bestimmen lassen, die für den Erwerb des Konzepts als zentral anzusehen sind, nämlich: 1. Welche Verstehenselemente kommen im Unterricht zur Sprache? 2. Wie ist die Qualität der eingesetzten Repräsentationen? und 3. Wie hoch ist die strukturelle Klarheit des Unterrichts? (Z. B. im Hinblick auf die Kohärenz des Auftretens der Verstehenselemente und Repräsentationen im zeitlichen Verlauf des Unterrichts).

Mit dem 5. Kapitel wird der empirische Teil der Arbeit eröffnet, werden Fragestellungen formuliert, die durch das mikrogenetische Forschungsdesign mit pythagorasspezifischem Vor- und Nachtest zu den videografierten drei Einführungslektionen beantwortet werden sollen. Das 6. Kapitel stellt das empirische Vorgehen vor, entwickelt und beurteilt die Güte der eingesetzten Instrumente zur Erfassung der oben erwähnten fachdidaktischen Unterrichtsqualität. Im Anschluss daran findet sich im 7. Kapitel die Darstellung der Ergebnisse zu den Fragestellungen des 5. Kapitels. Es zeigt sich, dass alle drei fachdidaktischen Qualitätsmerkmale unter Kontrolle von Interesse, Intelligenz und Vortest mit höheren Schülerleistungen einhergehen. Das mag nicht überraschen, schon deshalb nicht, weil es auch wünschenswert ist, jedoch sind die Wirkungspfade von Merkmalen der Unterrichtsqualität hin zu Fachleistungen nicht so eindeutig, wie man glauben würde und kaum so konzeptspezifisch untersucht worden wie in dieser Arbeit. Auffälliger ist dagegen, dass die fachdidaktischen Qualitätsmerkmale nicht oder nur schwach mit der kognitiven Aktivierung des Unterrichts korrelieren. Ein interessanter Befund, den es weiter aufzuklären gilt und der für die Autorin Anlass ist, zwischen «allgemein kognitiv aktivierend» und «konzeptspezifisch kognitiv aktivierend» zu unterscheiden, was weitere Forschungshypothesen eröffnet. Eine ausführliche und anregende Diskussion der Ergebnisse erfolgt im abschliessenden 8. Kapitel, in dem die zentralen Befunde vor dem Hintergrund anderer fachdidaktischer Bestrebungen und Erfordernisse, beispielsweise der Lehrerbildung, eingeordnet werden.

Zusammenfassend darf die Arbeit nach Ansicht des Rezensenten, einem Mathematikdidaktiker, als äusserst gelungen betrachtet werden. Die Verbindung von kognitionspsychologischen und fachdidaktischen Perspektiven führt im vorliegenden Fall zu einer ebenso theoretisch wie empirisch ertragreichen Untersuchung, die in ihrer Darstellung, insbesondere auch in sprachlicher Hinsicht, besticht. Gewiss, die enge konzeptspezifische Ausrichtung dieser Arbeit wirft ernsthafte Fragen nach ihrer Übertragbarkeit auf: Wie verallgemeinerungsfähig ist beispielsweise das Pythagoras-Verstehensmodell, wenn man längere Unterrichtssequenzen ins Auge fasst, Übungsphasen mit berücksichtigt, grössere begriffliche Einheiten betrachtet? Welche Struktur hat beispielsweise ein Verstehensmodell zum geometrischen Abbildungsbegriff? Ungeachtet solch möglicher Grenzen bietet jedoch der hier vorgestellte Ansatz über die Bestimmung von Verstehenselementen und den aus ihnen hervorgehenden Repräsentationen ma-

thematischer Begriffe äusserst vielfältige Anregungen für ein unterrichtswirksames didaktisches Denken und Handeln.

L i t e r a t u r

Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009): The Pythagoras Study: Investigating Effects of Teaching and Learning in Swiss and German Mathematics Classrooms. In T. Janik & T. Seidel (ed.): *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in the Classroom*. Münster: Waxmann, 137 – 160.

Reinhard Hölzl, Pädagogische Hochschule Zentralschweiz Luzern.